

Tensor de tensão, inércia e círculo de Mohr

Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

26 pag.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
ENGENHARIA MECÂNICA



RELATÓRIO DO SEMINÁRIO DE
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS I

CAROLINY SUQUE ENDLICH
GUILHERME GOMES FIOREZI
MURILO ZUCATELLI ELIAS
PHELIPE AUGUSTO

VITÓRIA – ES

2017

Sumário

1.	Introdução	3
2.	Tensão.....	3
2.1.	Estado de tensão	3
2.2.	Tensor de tensão	4
2.3.	Rotação do tensor tensão	6
2.4.	Tensões principais e planos principais	8
2.4.1.	Autovalor e autovetor	8
2.5.	Tensões cisalhantes máximas	9
2.6.	Círculo de Mohr das tensões	9
2.6.1.	Estado Plano de Tensões.....	9
2.6.2.	Transformação de eixos para o estado plano de tensões.....	10
2.6.3.	Círculo de Mohr e o estado triplo de tensões.....	13
3.	Inércia de Área.....	15
3.1.	Definição	15
3.2.	Eixos principais de inércia com Círculo de Mohr	16
3.3.	Tensor de inércia	16
3.4.	Rotação do tensor de inércia.....	18
3.5.	Momentos de Inércia principais	19
4.	Exemplos	20
	Referências bibliográficas	26

1. Introdução

Necessita-se estudar a deformação e as tensões nos sistemas materiais que estamos projetando para aplicações de engenharia. Todos os materiais têm um certo limite para suportar forças, que além do limite não conseguem desempenhar a função pretendida. Todos os projetos são baseados no critério de que os materiais utilizados têm a capacidade de suportar as cargas de trabalho do sistema. Assim, é necessário determinar o estado de tensão na matéria.

A tensão em um ponto contínuo tridimensional pode ser medida em termos de nove quantidades, três por plano, em três planos perpendiculares transversais no ponto. Essas nove quantidades podem ser vistas como componentes do tensor de segunda ordem, chamado tensor de tensão.

Neste trabalho, pretende-se apresentar um estudo sobre a determinação das tensões principais utilizando o tensor das tensões e círculo de Mohr.

2. Tensão

2.1. Estado de tensão

Considere um corpo onde forças externas são aplicadas, então é feito uma secção e chegamos a um plano retirado desse corpo (Figura 1a) que age uma força interna \mathbf{F} , se substituirmos por suas componentes ΔF_x , ΔF_y , ΔF_z tangentes e normais a área e reduzirmos essa área a um limite tendendo a zero, teremos então que o quociente entre a força e área tenderá a um limite:

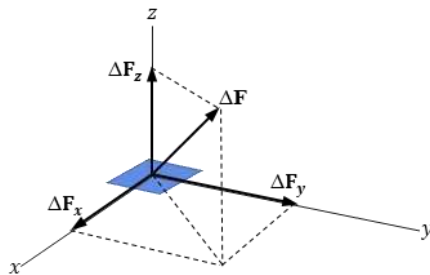


Figura 1a.

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

É denominado tensão normal no plano.

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

São tensões cisalhantes na direção x e y no plano de direção z. temos então o resultado na Figura 1b.

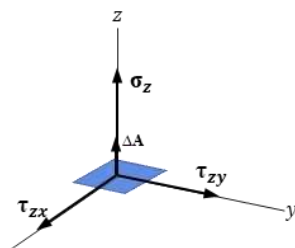


Figura 1b.

Se o corpo for ainda mais seccionado por outros planos paralelos x-z e y-z, então poderemos cortar um elemento cúbico que representa o **estado de tensão** que age em torno do ponto escolhido do corpo (Figura 1c).

Assim o estado de tensão é caracterizado por três componentes que agem em cada face do elemento orientado ao longo dos eixos x, y, z totalizando 3 faces e nove quantidades de

tensões podendo ser vistas como componentes do tensor de segunda ordem, chamado tensor de tensão.

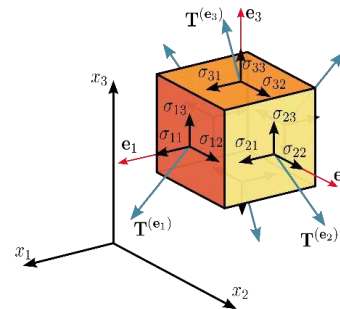


Figura 1c.

2.2. Tensor de tensão

A tensão, que é força por unidade de área, não depende apenas da magnitude da força e orientação do plano, mas também da direção da força. Assim, a especificação da tensão em um ponto requer dois vetores, um perpendicular ao plano em que a força está agindo e outro na direção da força. Esse objeto é conhecido como um tensor de segunda ordem. É definida como dois vetores que ficam lado a lado e que atuam como uma unidade.

De acordo com o *teorema da tensão de Cauchy*, conhecendo apenas os vetores tensão sobre três planos mutuamente perpendiculares, o vetor tensão sobre qualquer outro plano passando através daquele ponto pode ser determinado através das equações de transformação de coordenadas.

O teorema da tensão de Cauchy estabelece que existe um campo tensorial de segunda ordem $\sigma(\mathbf{x}, t)$, denominado tensor tensão de Cauchy, independente de \mathbf{n} , tal que \mathbf{T} é um funcional linear de \mathbf{n} .

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Considere um tetraedro com três faces orientadas nos planos coordenados, e com uma área infinitesimal dA orientada em um sentido arbitrário especificado por um vetor unitário normal \mathbf{n} . O tetraedro é formado cortando o elemento cúbico infinitesimal ao longo de um plano arbitrário \mathbf{n} . O vetor tensão sobre este plano é denotado por $\mathbf{T}^{(n)}$. Os vetores tensão agindo sobre as faces do tetraedro são denotados por $\mathbf{T}^{(e_1)}$, $\mathbf{T}^{(e_2)}$ e $\mathbf{T}^{(e_3)}$. O equilíbrio de forças:

$$\mathbf{T}^{(n)} dA - \mathbf{T}^{(e_1)} dA_1 - \mathbf{T}^{(e_2)} dA_2 - \mathbf{T}^{(e_3)} dA_3 = \rho \left(\frac{h}{3} dA \right) \mathbf{a}$$

Onde o lado direito representa a massa do tetraedro multiplicada por sua aceleração. Considerando o plano \mathbf{n} como base. As áreas das faces do tetraedro perpendiculares aos eixos x_1, x_2, x_3 podem ser determinadas por projeção de dA sobre cada face.

$$dA_1 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) dA = n_1 dA$$

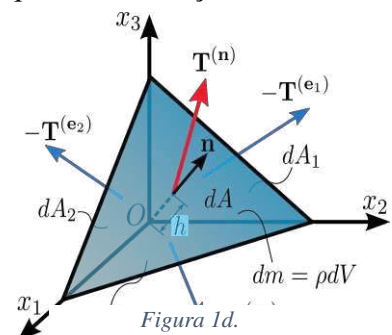


Figura 1d.

$$dA_2 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) dA = n_2 dA$$

$$dA_3 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) dA = n_3 dA$$

E então substituindo na equação e cancelando dA por divisão

$$\mathbf{T}^{(n)} - \mathbf{T}^{(e_1)}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) - \mathbf{T}^{(e_2)}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) - \mathbf{T}^{(e_3)}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) = \rho \left(\frac{h}{3}\right) \mathbf{a}$$

Para considerar o caso limite quando o tetraedro se reduz a um ponto, h deve convergir a zero (intuitivamente, o plano \mathbf{n} é transladado ao longo de \mathbf{n} para O). Como resultado, o lado direito da equação converge para 0, e assim:

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}^{(e_1)}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) + \mathbf{T}^{(e_2)}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) + \mathbf{T}^{(e_3)}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_1 \mathbf{T}^{(e_1)} + \mathbf{e}_2 \mathbf{T}^{(e_2)} + \mathbf{e}_3 \mathbf{T}^{(e_3)})$$

Que podemos rearranjar como:

$$\mathbf{T}^{(n)} = [n_1 \ n_2 \ n_3] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{(e_1)} \\ \mathbf{T}^{(e_2)} \\ \mathbf{T}^{(e_3)} \end{bmatrix}$$

O termo entre parentes do lado direito representa o tensor de tensões de Cauchy. O vetor tensão associado a cada um dos planos, $\mathbf{T}^{(e_1)}$, $\mathbf{T}^{(e_2)}$ e $\mathbf{T}^{(e_3)}$ pode ser decomposto em uma componente normal e duas componentes cisalhantes, componentes nas direções dos três eixos coordenados.

$$\mathbf{T}^{(e_1)} = T_1^{(e_1)} \mathbf{e}_1 + T_2^{(e_1)} \mathbf{e}_2 + T_3^{(e_1)} \mathbf{e}_3 = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \tau_{12} \mathbf{e}_2 + \tau_{13} \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{T}^{(e_2)} = T_1^{(e_2)} \mathbf{e}_1 + T_2^{(e_2)} \mathbf{e}_2 + T_3^{(e_2)} \mathbf{e}_3 = \tau_{21} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 + \tau_{23} \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{T}^{(e_3)} = T_1^{(e_3)} \mathbf{e}_1 + T_2^{(e_3)} \mathbf{e}_2 + T_3^{(e_3)} \mathbf{e}_3 = \tau_{31} \mathbf{e}_1 + \tau_{32} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{(e_1)} \\ \mathbf{T}^{(e_2)} \\ \mathbf{T}^{(e_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Substituindo em $\mathbf{T}^{(n)}$:

$$\mathbf{T}^{(n)} = [n_1 n_2 n_3] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$[T_1^{(n)} T_2^{(n)} T_3^{(n)}] = [n_1 n_2 n_3] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Ou podemos escrever também, de forma mais usual:

$$\begin{bmatrix} T_1^{(n)} \\ T_2^{(n)} \\ T_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Por simetria:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

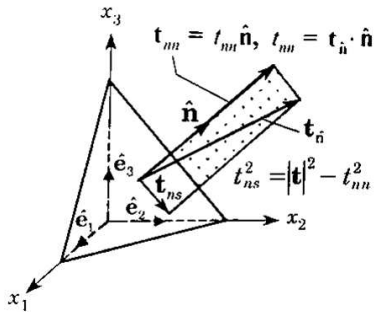


Figura 1e.

$\mathbf{T}^{(n)}$ calculado terá suas componentes em termos dos eixos x_1, x_2, x_3 , a normal ao plano será dado pela componente de $\mathbf{T}^{(n)}$ na direção da normal $\hat{\mathbf{n}}$, e a tensão cisalhante, a componente de $\mathbf{T}^{(n)}$ perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$.

$$t_{nn} = \mathbf{T}^{(n)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad t_{ns} = (\mathbf{T}^{(n)} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$(t_{ns})^2 = |\mathbf{T}^{(n)}|^2 - (t_{nn})^2$$

2.3. Rotação do tensor tensão

Um tensor de segunda ordem pode ser representado por dois sistemas de coordenadas diferentes e manter as mesmas características, ou seja, um tensor é contravariante assim como um vetor. Não entrando em muitas análises algébricas, demonstraremos através de um exemplo:

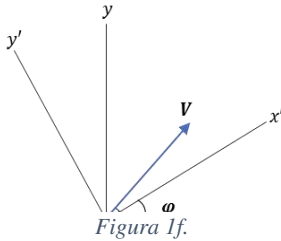


Figura 1f.

Observando a imagem ao lado, podemos escrever o vetor \mathbf{V} nos dois sistemas de coordenadas (x, y) e (x', y') , sem perder as características.

$$\mathbf{V} = V \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + V \sin \theta \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{V} = V \cos(\theta - \varphi) \hat{\mathbf{x}}' + V \sin(\theta - \varphi) \hat{\mathbf{y}}'$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$$

$\sin(\theta - \varphi) = \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi$, reescrevendo essas duas equações, temos:

$$\begin{bmatrix} V \cos(\theta - \varphi) \\ V \sin(\theta - \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \cos \theta \\ V \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{x', y'} = \mathbf{M}_{x, y \rightarrow x', y'} \mathbf{V}_{x, y}$$

Onde $\mathbf{M}_{x, y \rightarrow x', y'}$ é a matriz de rotação que leva o vetor do sistema de coordenadas (x, y) para (x', y') .

Analogamente, podemos fazer o mesmo com um tensor de tensão:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T$$

σ' é o tensor de tensão em base de um sistema ortogonal rotacionado em relação ao sistema ortogonal inicial σ , como \mathbf{L} é uma matriz de rotação, em um sistema de coordenadas ortogonais sua inversa equivale a sua transposta.

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^T \text{ e } \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{I}.$$

Basicamente, podemos entender a equação de rotação do tensor como:

$$\sigma'_{x'y'z'} = [L_{xyz \rightarrow x'y'z'}] \sigma_{xyz} [L^T_{x'y'z' \rightarrow xyz}]$$

A matriz de rotação genérica em torno de um eixo qualquer de rotação é dada pelos cossenos diretores a seguir:

$$\mathbf{L}_G = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix}$$

Onde $\cos(a', b)$ é o ângulo entre os eixos a' e b . Se escolhermos como eixo de rotação, um dos eixos do seu sistema de coordenadas (x, y, z) , \mathbf{L}_G pode ser uma rotação apenas em torno do eixo z como na Figura 1d ou uma rotação em torno do eixo x e y , assim:

$$\mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

E o tensor de tensões em um sistema de coordenadas rotacionado de θ em torno de z fica definido como:

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma rotação em torno de um eixo arbitrário qualquer pode ser decomposta em rotações sucessivas em torno dos eixos que compõem um sistema inercial fixo euclidiano pelos três ângulos de Euler. Podemos então rotacionar em torno de z , depois em torno de x , e depois em torno de y , da seguinte maneira:

$$\sigma' = \mathbf{L}_z \sigma \mathbf{L}_z^T \quad \sigma'' = \mathbf{L}_x \sigma' \mathbf{L}_x^T \quad \sigma''' = \mathbf{L}_y \sigma'' \mathbf{L}_y^T$$

$$\text{Ou também dessa forma: } \sigma''' = \mathbf{L}_y \mathbf{L}_x \mathbf{L}_z \sigma \mathbf{L}_z^T \mathbf{L}_x^T \mathbf{L}_y^T$$

2.4. Tensões principais e planos principais

Para um determinado estado de tensão, a determinação das tensões normais e os esforços de cisalhamento máximos em um ponto são de interesse considerável no projeto das estruturas porque ocorrem falhas quando as magnitudes das tensões excedem os permitidos valores de tensão, chamados pontos fortes do material.

A este respeito, é preciso determinar os valores e os planos nos quais as tensões são máximas. Assim, devemos determinar os autovalores e os vetores próprios associados ao tensor tensão. É claro a partir da Figura 1d e 1c que o componente normal de um vetor de tensão é o máximo quando $\mathbf{T}^{(n)}$ é paralelo ao vetor normal \mathbf{n} .

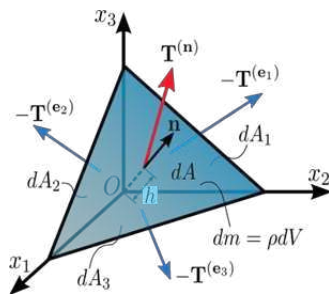


Figura 1d- Elemento infinitesimal seccionado.

Se designarmos o valor de tensão normal por λ . então podemos escrever $\mathbf{T}^{(n)} = \lambda \mathbf{n}$. No entanto, pela fórmula de Cauchy $\mathbf{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. (Devido à simetria do tensor de tensão).

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

$$(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

2.4.1. Autovalor e autovetor

A equação acima é um conjunto homogêneo de equações para os componentes do vetor \mathbf{n} uma solução não trivial existirá se o determinante da matriz for nulo, ou seja, se a matriz $(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{I})$ não for invertível. O esse determinante nulo produz uma equação cúbica para a equação característica calculada, cuja solução produz três valores de λ . Os autovalores λ de $\boldsymbol{\sigma}$ são chamados de tensões principais e os autovetores associados são chamados de planos principais.

Isso é para um determinado estado de situação, dado ponto no corpo. existe um conjunto de planos em que o vetor de tensão é normal para os planos não há componente de cisalhamento nos planos.

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Produz $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, três tensões normais aos planos, para cada autovalor λ_i , existe um autovetor \mathbf{n}_i normal ao plano onde se encontra essa tensão normal λ_i , todas as tensões cisalhantes são nulas.

2.5. Tensões cisalhantes máximas

Na seção anterior, estudamos o procedimento para determinar as tensões normais máximas em um ponto. Os autovalores do tensor de tensão no ponto são as tensões normais máximas em três planos perpendiculares (cujas normais são os autovetores) e a maior dessas três tensões é a verdadeira tensão normal máxima. Lembre-se de que as tensões de cisalhamento são zero nos planos principais. Nesta seção, desejamos determinar as tensões de cisalhamento máxima e seus planos.

Seja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ denotar as tensões principais (normais) e \mathbf{n} um vetor normal da unidade arbitrária. Então o vetor de tensão é $\mathbf{t} = \lambda_1 n_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 n_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 n_3 \mathbf{e}_3$ e $t_{nn} = \lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2$. O quadrado da magnitude do esforço de cisalhamento no plano com a unidade normal \mathbf{n} é dado por:

$$(t_{ns})^2 = |\mathbf{T}^{(n)}|^2 - (t_{nn})^2 = \lambda_1^2 n_1^2 + \lambda_2^2 n_2^2 + \lambda_3^2 n_3^2 - (\lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2)^2$$

Utilizando alguns métodos matemáticos que não será abordado aqui. Podemos concluir que a tensão cisalhante máxima é dada por:

$$(t_{ns})_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} (\lambda_{m\acute{a}x} - \lambda_{m\acute{i}n})$$

Onde $\lambda_{m\acute{a}x}$ e $\lambda_{m\acute{i}n}$ é a máxima e mínima tensão principal respectivamente. O plano da tensão cisalhante máxima atua entre os planos de tensão principal máxima e mínimo.

$$\mathbf{n}_{ns} = \mathbf{n}_{\lambda_{m\acute{a}x}} - \mathbf{n}_{\lambda_{m\acute{i}n}}$$

\mathbf{n}_{ns} é a normal ao plano onde atua a tensão cisalhante máxima.

2.6. Círculo de Mohr das tensões

2.6.1. Estado Plano de Tensões

Esse estado é obtido quando não há carga em uma superfície do corpo, assim as componentes das tensões normal e de cisalhamento serão nulas na face de um elemento localizado nessa superfície, ou seja, $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Dessa forma, o elemento infinitesimal do estado plano de tensões fica:

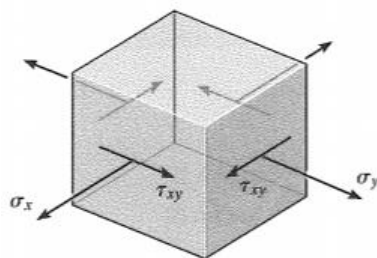


Figura 2- Estado plano de tensões.

E este também pode ser representado dessa forma:

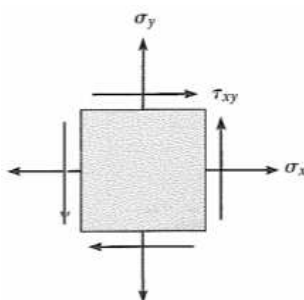


Figura 3- Vista bidimensional do plano de tensões.

2.6.2. Transformação de eixos para o estado plano de tensões

Ao se rotacionar o elemento infinitesimal de um ângulo θ gerando novos eixos x' e y' perpendiculares também rotacionados de θ como mostrados abaixo:

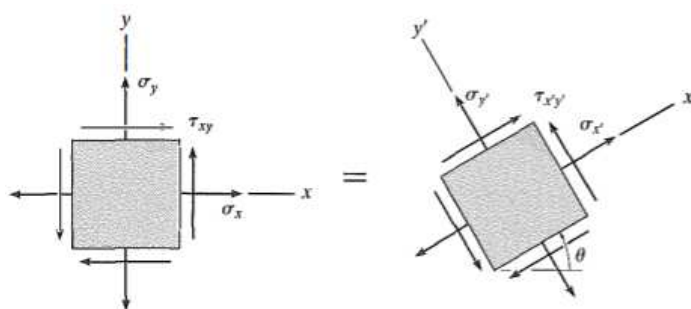


Figura 4- Novos eixos x' e y' .

Por trigonometria e métodos matemáticos foram determinadas algumas equações gerais de transformação dos eixos de coordenada x e y para os eixos x' e y' abaixo:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{Eq. 1})$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{Eq. 2})$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (\text{Eq. 3})$$

Essas equações são utilizadas para acharmos as tensões principais e de cisalhamento máxima no plano derivando-as em relação a θ e igualando a 0, obtendo-se as expressões abaixo:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (\text{Eq. 4})$$

$$\tan 2\theta_c = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \quad (\text{Eq. 5})$$

Onde os valores de θ_p são os ângulos dos planos da tensão normal máxima e mínima e os valores de θ_c são os ângulos que nos dão a orientação do elemento cujas faces sofrem tensão de cisalhamento máxima. De uma forma genérica, aplicando os resultados obtidos e simplificando, a fórmula para as tensões principais e tensão de cisalhamento máxima são:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{Eq. 6})$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{Eq. 7})$$

Outra forma de abordarmos o tema de tensões principais e de cisalhamento máxima é uma forma “gráfica” chamada de Círculo de Mohr, neste caso, para tensões no plano. Tal método é obtido eliminando o θ das equações 1 e 3 e somando-as, obtendo assim:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{m\acute{e}d})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad (\text{Eq. 8})$$

Onde $\sigma_{m\acute{e}d} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ e $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Tal equação pode ser interpretada como a equação de um círculo com centro deslocado de $\sigma_{m\acute{e}d}$ no eixo das tensões normais e com raio R.

Para a construção do Círculo de Mohr, é necessário primeiramente definir os eixos σ e τ , seguindo as notações do livro Hibbeler de Resistências dos Materiais consideraremos o eixo σ na horizontal positivo para a direita e o eixo τ vertical positivo para baixo. Dessa maneira, o centro do círculo (C) é marcado em $C(\sigma_{m\acute{e}d}, 0)$ como dito anteriormente. O próximo passo é descobrir um ponto do círculo para que depois possamos terminá-lo, e como sabemos os valores das tensões normal e de cisalhamento para quando $\theta = 0^\circ$ ($\sigma_{x'} = \sigma_x$ e $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}$), isto é,

os valores calculados sem rotação do elemento, e os eixos x' e y' coincidem com os eixos x e y , respectivamente, temos o nosso ponto A (σ_x, τ_{xy}).

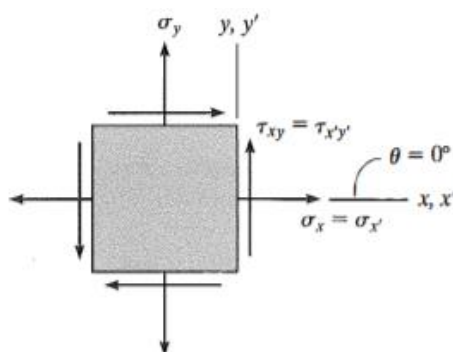


Figura 5- Descoberta do ponto A.

Assim, podemos montar o Círculo de Mohr que ficará como mostrado na figura a seguir.

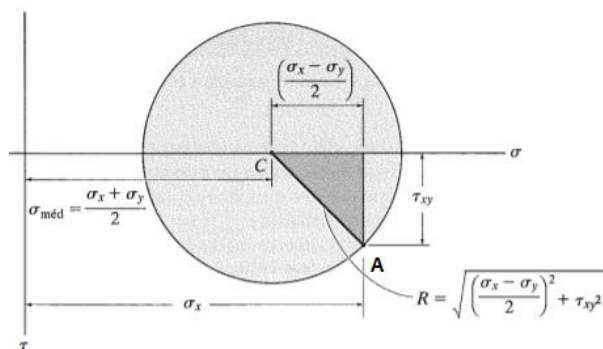


Figura 6- Construção do Círculo de Mohr.

Para analisarmos as tensões principais, vamos analisar seus módulos e ângulo de rotação ou do plano de corte. Os valores $\sigma_{1,2}$ são obtidos a partir de $\sigma_{1,2} = \sigma_{méd} \pm R$, e para sabermos o valor do ângulo de rotação do elemento (θ_{p1}), temos que descobrir o ângulo entre \overline{CA} e o eixo σ (α) medido no sentido anti-horário, lembrando que $\alpha = 2\theta_{p1}$, e que σ_1 e σ_2 estão separados por 90° no elemento e por 180° no Círculo de Mohr. Esses ângulos estão melhores mostrados na figura 6.

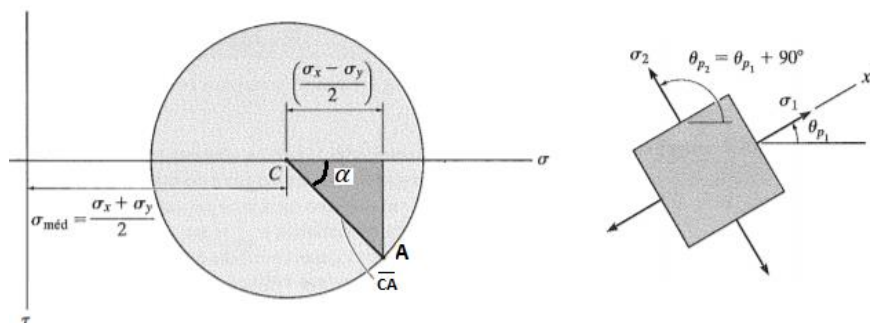


Figura 7- Ângulos α e θ_{p1} das tensões principais.

Para analisarmos a tensão de cisalhamento máxima, observemos o círculo de Mohr da figura 6. Nele podemos perceber que ela se dá no ponto mais baixo do círculo (E), onde a tensão normal é $\sigma_{méd}$ e o valor da tensão de cisalhamento vale $\tau_{máx} = R$. E como visto na figura 7, o ângulo β de rotação (em sentido horário) no círculo de Mohr representa $2\theta_c$ (duas vezes o ângulo de rotação do elemento no mesmo sentido).

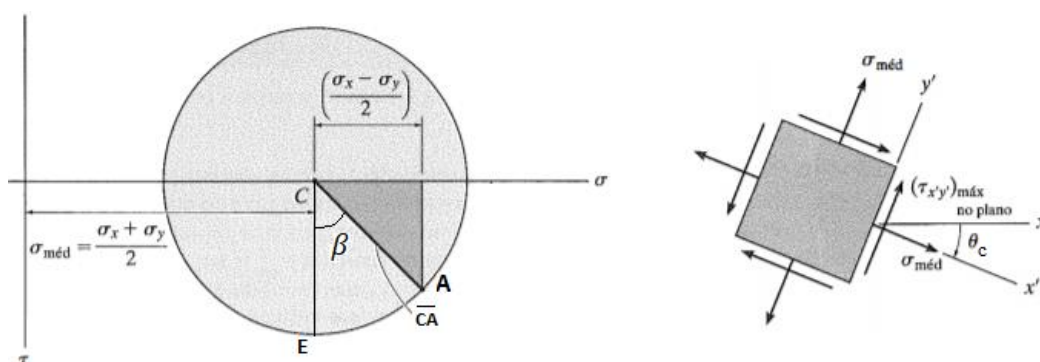


Figura 8- Ângulos β e θ_c da tensão de cisalhamento máxima.

2.6.3. Círculo de Mohr e o estado tripla de tensões

Como já visto, quando um ponto em um corpo está sujeito a um estado de tensão geral tridimensional, haverá em todas as faces do elemento infinitesimal duas tensões de cisalhamento e uma tensão normal. Para esse estado também é possível desenvolver equações de transformação de tensão que podem ser usadas para determinar as componentes de tensão normal e de cisalhamento que agem em qualquer plano oblíquo do elemento. A discussão da transformação de tensão em três dimensões não é o foco dessa disciplina, entretanto, ela é discutida em livros que tratam da teoria da elasticidade. Para nossa finalidade, consideraremos que a orientação principal do elemento e as tensões principais são conhecidas, condição conhecida como **tensão triaxial**.

Tratando o elemento infinitesimal no estado geral como três estados planos de tensão, é possível montar três círculos de Mohr no mesmo sistema de eixos onde os três círculos estão correlacionados. Dizendo que as tensões principais no elemento têm intensidades máxima, intermediária ou mínima, temos que os três estados planos são como os representados na figura 8 e os três círculos de Mohr correlacionados são mostrados na figura 9.

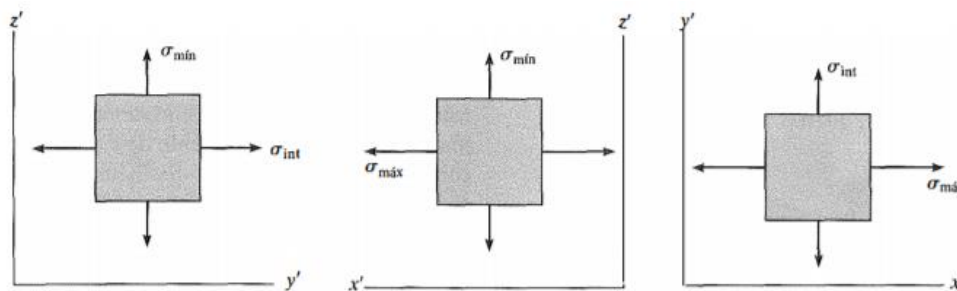


Figura 9- Estados planos de tensão do elemento carregado na condição de tensão triaxial.

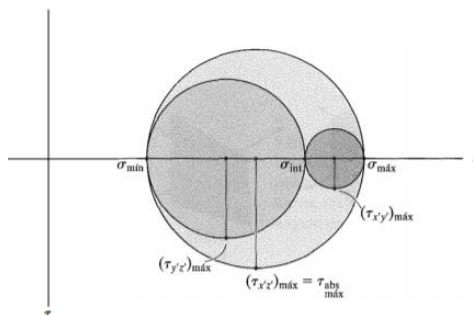


Figura 10- Círculo de Mohr para o estado triplo de tensões.

A partir da figura 8, notamos que o centro do círculo maior é dado no ponto $C(\frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{i}n}}{2}, 0)$, ainda podemos perceber que a tensão de cisalhamento máxima absoluta é dada pelo raio do círculo maior, ou seja, $\tau_{abs\ max} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}}{2}$. Similarmente, as outras tensões de cisalhamento máxima podem ser calculadas.

Em uma análise desse Círculo de Mohr para o estado triplo de tensões, notamos que independentemente da orientação do plano, a tensão de cisalhamento τ no plano sempre será menor do que a tensão de cisalhamento máxima. Nesse mesmo sentido, a tensão normal σ que age em qualquer plano terá um valor que se encontrará entre as tensões principais máxima e mínima, ou seja, $\sigma_{m\acute{a}x} \geq \sigma \geq \sigma_{m\acute{i}n}$.

3. Inércia de Área

3.1. Definição

O **momento de inércia de área**, também chamado de segundo momento de área ou segundo momento de inércia, é uma propriedade geométrica da seção transversal de elementos estruturais. Fisicamente o segundo momento de inércia está relacionado com as tensões e deformações que aparecem por flexão em um elemento estrutural e, portanto, junto com as propriedades do material determina a resistência de um elemento estrutural sob flexão.

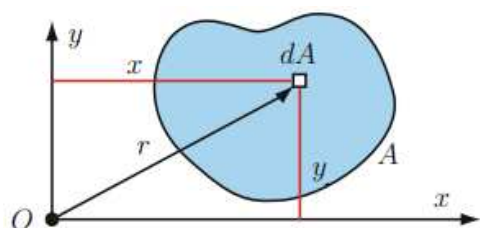


Figura 11- Elemento plano para cálculo de inércia.

Definimos os momentos de inércia como:

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA$$

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA$$

Em torno dos eixos x e y, respectivamente. E o produto de inércia como sendo:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Somando I_{xx} e I_{yy} definimos o momento polar de inércia:

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = \int_A (y^2 + x^2) dA = \int_A r^2 dA$$

$$J_o = \int_A r^2 dA$$

Como r^2 é uma distância independente da direção dos eixos y,x, J_o depende apenas de onde está o ponto O de origem, e independe da rotação de x,y.

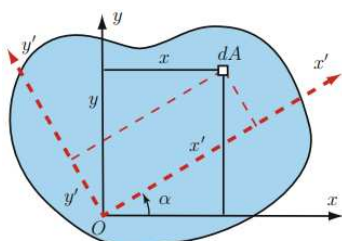


Figura 12- Rotação do sistema de coordenadas.

$$J_o = I_{xx} + I_{yy} = I_{x'x'} + I_{y'y'}$$

3.2. Eixos principais de inércia com Círculo de Mohr

Podemos decompor os eixos x' e y' nos eixos x e y , em termos de α , substituí-los nas equações de inércia e expressar as inércias nos eixos x' e y' em termos de x e y :

$$I_{x'x'} = I_{yy} \sin^2 \alpha + I_{xx} \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

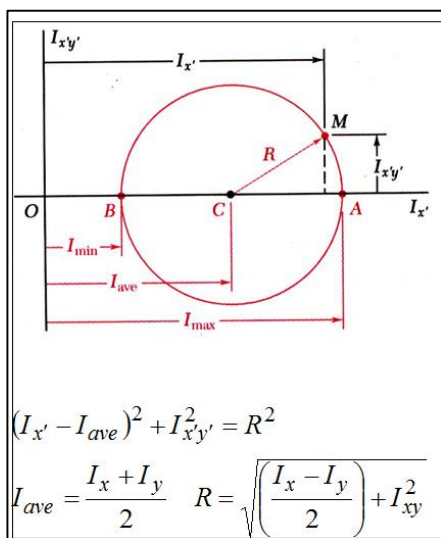
$$I_{y'y'} = I_{xx} \sin^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \alpha + 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_{x'y'} = I_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (I_{xx} - I_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha$$

Manipulando essas equações podemos chegar em:

$$\left(I_{x'x'} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \right)^2 + (I_{x'y'})^2 = \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \right)^2 + (I_{xy})^2$$

Que é a equação para o círculo de Mohr com centro em $\left(\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}, 0 \right)$



Lembrando que $I_{xx} + I_{yy} = I_{x'x'} + I_{y'y'}$

Podemos ver a inércia máxima está no ponto A, e a mínima está em B, com $I_{x'y'} = 0$.

$$\left(I_{x'x'} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \right)^2 + 0^2 = \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \right)^2 + (I_{xy})^2$$

$$I_{máx,min} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \right)^2 + (I_{xy})^2}$$

$I_{máx}$ e I_{min} definem as inércias principais do plano.

3.3. Tensor de inércia

Podemos tomar uma matriz com elementos de inércia para um plano qualquer, onde os eixos x e y estão no plano, e o eixo z está ortogonal ao plano.

$$I_o = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_o \end{bmatrix}$$

De fato I_{zx} e I_{zy} serão zeros, já que não possui elemento de área nos planos z-x e z-y, e I_{zz} será equivalente à inércia polar J_o . Assim para a matriz de inércia, o tensor de inércia está definido para rotação em torno do eixo z (normal ao plano), e I_o possuirá 3 autovalores e 3 autovetores, dois dos quais apontam para o máximo e mínimo momento de inércia, e o último aponta na direção de z, que é J_o invariante com a rotação em torno de z.

A matriz acima é preenchida considerando os eixos x, y no plano e z normal ao plano, mas pode ser refeita para qualquer caso, seja x,z no plano e y normal ou y,z no plano e x normal.

3.4. Rotação do tensor de inércia

Se retornarmos as equações anteriores de inércia em eixos rotacionados na seção 3.2:

$$I_{x'x'} = I_{yy} \sin^2 \alpha + I_{xx} \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{xx} \sin^2 \alpha + 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_{x'y'} = I_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (I_{xx} - I_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha$$

$I_{z'z'} = I_{zz}$, já que o plano em 3.1 não possui dimensão nem área em z.

Essas equações podem ser reescritas de forma:

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a primeira equação matricial, podemos escrever o produto matricial como sendo:

$$I' = L^T \cdot I \cdot L$$

Onde L representa a matriz de rotação dos eixos x,y. Como $L^T = L^{-1}$, a inversa é igual a transposta, multiplicando a esquerda por L.

3.5. Momentos de Inércia principais

$$L \cdot I' = I \cdot L \rightarrow I \cdot L = L \cdot I'$$

Se estamos interessados em I' com as inércias máximas e mínimas, $I_{y'x'}$ e $I_{x'y'}$ se anulam, e I' equivale a uma matriz diagonal. Pelo teorema da diagonalização em álgebra linear, L é formado por autovetores e I' contém os autovalores em sua diagonal.

$$L \cdot I' = L \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = [\lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad \lambda_3 \mathbf{x}_3]$$

$$I \cdot L = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = [I\mathbf{x}_1 \quad I\mathbf{x}_2 \quad I\mathbf{x}_3]$$

Igualando as colunas $I \cdot L = L \cdot I'$.

$$I\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$$

$$I\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

$$I\mathbf{x}_3 = \lambda_3 \mathbf{x}_3$$

Onde λ_i são autovalores da matriz I , e \mathbf{x}_i são os autovetores associados aos respectivos autovalores λ_i . Para encontrar esses autovalores, devemos fazer:

Pode ser verificado que $\det(I_o - \lambda I) = 0$, faz:

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & J_o - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (I_{xx} - \lambda)(I_{yy} - \lambda)(J_o - \lambda) - I_{xy}I_{yx}(J_o - \lambda) = 0$$

Uma solução é $\lambda_1 = J_o$, e seu autovetor é $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$, onde $a = \forall \mathbb{R}$, na direção do eixo z .

E as outras duas soluções, são a resolução da equação:

$$(I_{xx} - \lambda)(I_{yy} - \lambda) - I_{xy}I_{yx} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(I_{xx} + I_{yy}) + I_{xx}I_{yy} - (I_{xy})^2 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{(I_{xx} + I_{yy}) \pm \sqrt{(I_{xx} + I_{yy})^2 - 4(I_{xx}I_{yy} - (I_{xy})^2)}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(I_{xx} + I_{yy})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}\right)^2 - I_{xx}I_{yy} + (I_{xy})^2} \\
&= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}
\end{aligned}$$

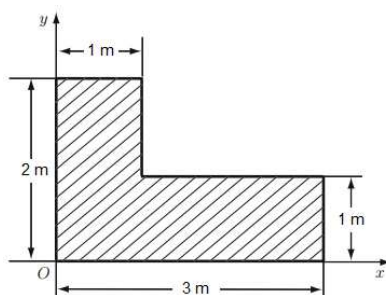
Isso prova a equivalência entre círculo de Mohr e matriz de inércia.

$$\lambda_{2,3} = I_{max,min}$$

Após achar $\lambda_{2,3}$, encontre os autovetores \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 associados e eles estarão apontados na direção dos eixos principais de inércia x' e y' .

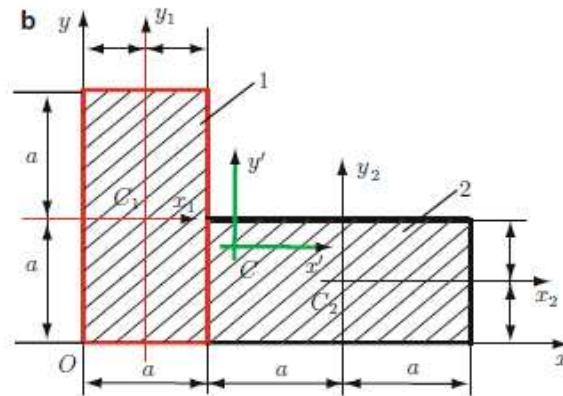
4. Exemplos

Exemplo 1: Encontre os momentos de inércia e produtos de inércia para a área mostrada na figura abaixo em relação ao centróide da peça. Encontre os principais momentos de inércia de área usando Mohr e o método de autovalor e autovetor.



Solução:

Dividindo a peça em duas figuras C_1 e C_2 :



Onde $a = 1$, podemos achar o centróide por onde passam os eixos $x'y'$:

$$x_c = \frac{x_{c_1}A_1 + x_{c_2}A_2}{A_1 + A_2} \text{ e } y_c = \frac{y_{c_1}A_1 + y_{c_2}A_2}{A_1 + A_2}$$

Com isso obtemos $x_c = 1.25 \text{ m}$ e $y_c = 0.75 \text{ m}$

Os momentos de inércia com relação ao centróide podem ser calculados utilizando-se do teorema dos eixos paralelos:

$$I_{xx} = [I_{c_1x_1x_1} + (y_{c_1})^2A_1] + [I_{c_2x_2x_2} + (y_{c_2})^2A_2]$$

$$I_{yy} = [I_{c_1y_1y_1} + (x_{c_1})^2A_1] + [I_{c_2y_2y_2} + (x_{c_2})^2A_2]$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

Com isso obtemos $I_{xx} = 1,083 \text{ m}^4$, $I_{yy} = 3,083 \text{ m}^4$ e $I_{zz} = 4,166 \text{ m}^4$.

O produto de inércia também pode ser calculado utilizando o teorema dos eixos paralelos:

$$I_{xy} = I_{c_1x_1y_1} + x_{c_1}y_{c_1}A_1 + I_{c_2x_2y_2} + x_{c_2}y_{c_2}A_2$$

Logo, $I_{xy} = -0,938 \text{ m}^4$

Então, construindo o tensor de inércia:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1,08 & -0,938 & 0 \\ -0,938 & 3,08 & 0 \\ 0 & 0 & 4,17 \end{bmatrix}$$

Encontrando os momentos de inércia principais **pelo método de autovalor e autovetor**:

Fazendo $\det(I - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1,08 - \lambda & -0,938 & 0 \\ -0,938 & 3,08 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4,17 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Como visto temos que $\lambda_1 = 4,17 \text{ m}^4$ e $\lambda_{2,3} = I_{\text{máx,mín}}$

$$\text{Logo, } \lambda_{2,3} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

Então obtemos após substituir: $I_{\text{máx}} = 3,45 \text{ m}^4$ e $I_{\text{mín}} = 0,713 \text{ m}^4$.

Encontrando os momentos de inércia principais pelo **método do círculo de Mohr**:

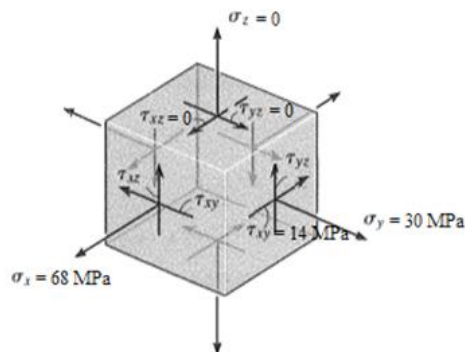
Utilizando o círculo de Mohr nós temos que os momentos de inércia principais podem ser determinadas fazendo o centro (C) somado ao raio (R):

$$I_{\text{máx,mín}} = C \pm R = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

$$I_{\text{máx,mín}} = \frac{1,08 + 3,08}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1,08 - 3,08}{2}\right)^2 + (-0,938)^2}$$

$$I_{\text{máx}} = 3,45 \text{ m}^4 \text{ e } I_{\text{mín}} = 0,713 \text{ m}^4$$

Exemplo 2: Determine as principais tensões do elemento abaixo utilizando Mohr e o método de autovalor e autovetor. Além disso, determine o estado de tensão no elemento rotacionado em $+30^\circ$ em torno de z .



Solução:

Construindo o tensor:

$\tau_{yx} < 0$, pois a área aponta para $+y$ e a tensão em $-x$.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 & -14 & 0 \\ -14 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de autovalor e autovetor:

$$\begin{vmatrix} 68 - \lambda & -14 & 0 \\ -14 & 30 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ao realizar o determinante encontramos $\lambda_2 = 72,6 \text{ MPa}$ e $\lambda_1 = 25,4 \text{ MPa}$ que são $\sigma_{\text{máx}}$ e $\sigma_{\text{mín}}$, respectivamente.

Para determinar os autovetores substituímos λ_1 e λ_2 em $(\sigma - \lambda I)n = 0$ encontrando assim os autovetores n_1 e n_2 respectivos a λ_1 e λ_2 . Assim, após realizar os cálculos encontramos:

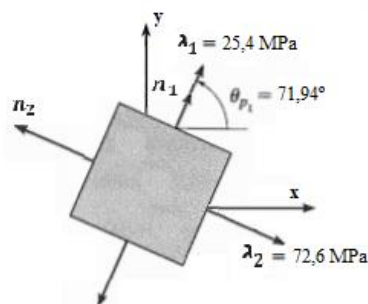
$$n_2 = \langle -0.95, 0.31, 0 \rangle \text{ e } n_1 = \langle 0.31, 0.95, 0 \rangle$$

Portanto, para determinar o ângulo podemos fazer um produto interno entre n_1 e o vetor unitário do eixo x :

$$n_1 \cdot i = |n_1||i| \cos \theta$$

$$\cos \theta = 0,31$$

$$\theta = 71,94^\circ$$



Pelo círculo de Mohr:

Utilizando o círculo de Mohr nós temos que as tensões principais podem ser determinadas fazendo o centro (C) somado ao raio (R):

$$\sigma_{m\acute{a}x,m\acute{i}n} = C \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x,m\acute{i}n} = \frac{68 + 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{68 - 30}{2}\right)^2 + (-14)^2}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 72,6 \text{ MPa e } \sigma_{m\acute{i}n} = 25,4 \text{ MPa}$$

O ângulo pode ser determinado da seguinte forma:

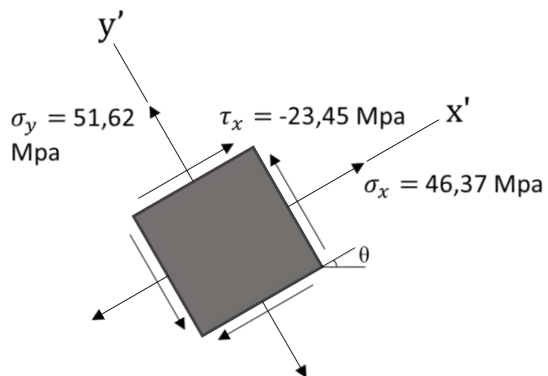
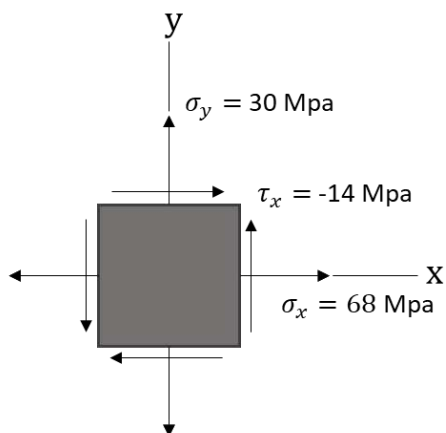
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Substituindo os valores pode-se obter $\theta_p = 18,2^\circ$ para σ_y , então para σ_x $\theta_p = 71,8^\circ$.

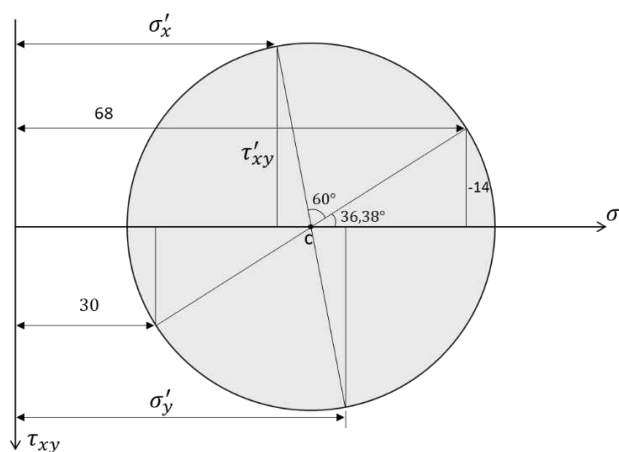
Rotacionando o elemento em $+30^\circ$ em torno de z. Utilizando tensor:

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ -\sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 68 & -14 & 0 \\ -14 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 & 0 \\ \sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{bmatrix} 46,37 & -23,45 & 0 \\ -23,45 & 51,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Utilizando Mohr:



$$\text{Como } C = \frac{68+49}{2} = 49$$

$$\sigma'_x = C - R \cos(180 - 96,38)$$

$$\sigma'_x = 46,37 \text{ Mpa}$$

$$\sigma'_y = C + R \cos(180 - 96,38)$$

$$\sigma'_y = 51,62 \text{ Mpa}$$

$$\tau_{xy} = -R \text{ sen}(180 - 96,38)$$

$$\tau_{xy} = -23,45 \text{ Mpa}$$

Referências bibliográficas

- [1] J.N. Reddy. **An Introduction to continuum mechanics**, with applications. 1.ed. Cambridge, 2010 Reimpr. 349p.
- [2] TENSOR TENSÃO DE CAUCHY. Disponível em :
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Tensor_tens%C3%A3o_de_Cauchy>. Acesso em: 18 nov. 2017.
- [3] HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 7. ed. São Paulo-SP: Pearson Education do Brasil Ltda. 2010.
- [4] Lay, David C. Álgebra linear e suas aplicações, 4. ed. LTC 2012.
- [5] MECÂNICA DOS SÓLIDOS I. Disponível em :
<<http://abraga.usuarios.rdc.puc-rio.br/mecsoll/parte3-plano-tensao.pdf>>. Acesso em: 19 nov. 2017.
- [6] PMR 2560 Robótica USP. Aula 2 parte 1. Transformações de Coordenadas.
- [7] TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS: PARÂMETROS DE REPRESENTAÇÃO. Disponível em :
<<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAAj0AH/cap2-parte1-06>>. Acesso em: 8 nov. 2017.
- [8] Dan B. Marghitu, Mihai Dupac. Advanced Dynamics, Centroids and Moments of Inertia, Chapter 2. Springer. 2012.
- [9] ÂNGULOS DE EULER. Disponível em :
<https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%82ngulos_de_Euler>. Acesso em: 24 nov. 2017.
- [10] MATRIZ DE ROTAÇÃO. Disponível em :
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_rota%C3%A7%C3%A3o>. Acesso em: 10 nov. 2017.
- [11] Prof. Walter Fetter Lages. Descrições e Transformações Espaciais. ENG10026 Robótica A. UFRGS Escola de Engenharia Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia 27 de setembro de 2017.
- [12] ROTATION MATRIX. Disponível em :
< <http://mathworld.wolfram.com/rotationmatrix.html>>. Acesso em : 27 nov. 2017.